

## Lösungen zu den Übungsaufgaben in Kapitel 5

### 1. Ergänzen Sie folgenden Lückentext:

Eine Relation auf  $A \times B$  ist eine \_\_\_\_\_ Menge  $R$  des \_\_\_\_\_ Produkts der Mengen \_\_\_\_\_ und \_\_\_\_\_.

Eine Relation auf  $A \times B$  ist eine **Teilmenge**  $R$  des **Kartesischen** Produkts der Mengen  **$A$**  und  **$B$** .

### 2. Bilden Sie das kartesische Produkt für folgende Mengen:

(a)  $A = \{\text{Inge, Karl, Fritz}\}$ ,  $B = \{1, 2\}$

(b)  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{+, -\}$ ,  $C = \{x, y\}$ .

(a)  $A \times B = \{\langle \text{Inge}, 1 \rangle, \langle \text{Inge}, 2 \rangle, \langle \text{Karl}, 1 \rangle, \langle \text{Karl}, 2 \rangle, \langle \text{Fritz}, 1 \rangle, \langle \text{Fritz}, 2 \rangle\}$

(b)  $A \times B \times C = \{\langle 1, +, x \rangle, \langle 1, +, y \rangle, \langle 1, -, x \rangle, \langle 1, -, y \rangle, \langle 2, +, x \rangle, \langle 2, +, y \rangle, \langle 2, -, x \rangle, \langle 2, -, y \rangle, \langle 3, +, x \rangle, \langle 3, +, y \rangle, \langle 3, -, x \rangle, \langle 3, -, y \rangle\}$

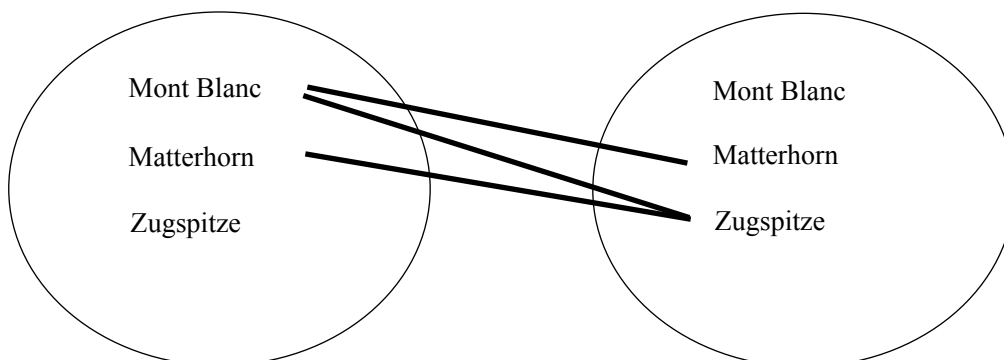
### 3. $B = \{\text{Zugspitze, Matterhorn, Mont Blanc}\}$

(a) Bilden Sie die Relation  $R$  auf  $B \times B$  nach der Relationsvorschrift » $a$  ist höher als  $b$ « für  $a, b \in B$ .

(b) Zeichnen Sie das dazugehörige Relationsdiagramm.

(a)  $R = \{\langle \text{Mont Blanc}, \text{Matterhorn} \rangle, \langle \text{Matterhorn}, \text{Zugspitze} \rangle, \langle \text{Mont Blanc}, \text{Zugspitze} \rangle\}$

(b)



### 4. Überprüfen Sie, ob die folgenden Relationsvorschriften zwangsläufig Äquivalenzrelationen implizieren:

(a) » $a$  ist Geschwister von  $b$ «

(b) » $a$  ist Halbgeschwister von  $b$ «

(c) » $a$  hat dieselbe Mutter wie  $b$ «,

(d) » $a$  hat einen IQ, der mindestens so hoch ist wie der IQ von  $b$ «.

(a) Die Relationsvorschrift impliziert nicht eine Äquivalenzrelation, da die Relationsvorschrift keine Relation impliziert, die reflexiv wäre – man kann nicht sein eigenes Geschwister sein.

(b) Die Relationsvorschrift impliziert nicht eine Äquivalenzrelation, da die durch diese Relationsvorschrift implizierte Relation nicht reflexiv ist. Auch die Annahme der Transitivität muss nicht zwangsläufig erfüllt sein. Es ist die Konstellation denkbar, dass  $a$  Halbgeschwister von  $b$  ist und  $b$  von  $c$ . Dies beinhaltet jedoch nicht notwendigerweise, dass auch  $a$  Halbgeschwister von  $c$  ist.

- (c) Die Relationsvorschrift impliziert zwangsläufig eine Äquivalenzrelation, da die durch die Relationsvorschrift implizierte Relation reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.
- (d) Die Relationsvorschrift impliziert nicht zwangsläufig eine Äquivalenzrelation, da die durch diese Relationsvorschrift implizierte Relation nicht notwendigerweise symmetrisch ist. Wenn  $a$  einen IQ (z. B. 140) hat der mindestens so hoch wie der von  $b$  (z. B. 100) folgt hieraus nicht zwangsläufig, dass der IQ von  $b$  mindestens so hoch wie der IQ von  $a$  ist. Die Symmetrie kann in einer Anwendung verletzt sein, so dass diese Relationsvorschrift nicht zwangsläufig eine Äquivalenzrelation impliziert.

**5. Überprüfen Sie, ob folgende Relationsvorschriften zwangsläufig strenge Ordnungsrelationen implizieren:**

» $a$  ist die Mutter von  $b$ «

» $a$  ist älter als  $b$ «

» $a$  hat gegen  $b$  im Tennis gewonnen«.

- (a) Die Relationsvorschrift impliziert nicht eine strenge Ordnungsrelation, da die Transitivität verletzt ist.
- (b) Die Relationsvorschrift impliziert zwangsläufig eine strenge Ordnungsrelation, da sowohl die Asymmetrie als auch die Transitivität erfüllt sein müssen.
- (c) Die Relationsvorschrift impliziert nicht zwangsläufig eine strenge Ordnungsrelation, da die Transitivität nicht zwangsläufig erfüllt sein muss. Ein Spieler  $a$  kann gegen einen Spieler  $b$  gewinnen und ein Spieler  $b$  gegen einen Spieler  $c$ , dies impliziert aber nicht zwangsläufig, dass ein Spieler  $a$  gegen den Spieler  $c$  gewinnen muss. Dies kann, muss aber nicht sein, so dass diese Relationsvorschrift nicht zwangsläufig eine strenge Ordnungsrelation impliziert.